**Практическая работа №2**

**Тема: «Решение систем линейных уравнений различными способами.»**

**Цель:** сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

**Методические указания и теоретические сведения к практической работе**

***1. Системы линейных уравнений***

***(общие сведения)***

 Пусть задана система  линейных уравнений с  неизвестными

  (1)

 Решением системы (1) называется совокупность чисел (, , …, ), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

***2. Метод Крамера***

 При решении методом Крамера используем определители -го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

 .

 ТЕОРЕМА. Если определитель системы , то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

 ; ; … ; ,

где определитель  может быть получен из главного определителя путем замены -го столбца на столбец из свободных членов.

 *Пример 1.*

 .

 Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

 

и три вспомогательных определителя:

 ; ; .

 Определитель  составлен из определителя  путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях  и  соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

 ;

 ;

 ;

 .

Неизвестные , ,  находим по формулам

 ; ; ;

 ; ; .

Ответ: ; ; .

*Пример2.* Решить систему  методом Крамера.

*Решение.* Выписываем *A* - матрицу системы и *B* - столбец свободных членов: , . Далее вычисляем определители:

;

;

;

.

По теореме Крамера ; ; . Ответ: ; ; .

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: , , . Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

 ***Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.***

Если определитель системы , то система является либо несовместной (когда  и ), либо неопределенной (когда  и ). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

*Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:*

*Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:*

 Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если ).

 Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

 Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

***3. Метод Гаусса***

 Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

 Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

 *Пример 3.*

 .

 В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (), во втором – 2 неизвестных ( и ) а в первом – 3 неизвестных (, , ). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при  равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при .

 Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

  (2)

 Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от  во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от  в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

  (3)

 Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

 Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от  в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

 .

Из последнего уравнения . Подставляем это значение  во втрое уравнение системы и находим :

 

 .

 В первое уравнение подставляем значения  и , получаем

 

 .

 Ответ: ; ; .

Рекомендуется сделать проверку.

***3. Матричный способ***

Систему можно решить и матричным способом.

#  Рассмотрим систему вида

 

 (4)

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

 .

Из неизвестных , ,  и свободных членов составим матрицы – столбцы

 ; .

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

 . (5)

Чтобы найти матрицу , умножим (7) на  слева.

A

 *Пример 4.*

 .

Найти обратную матрицу .

 РЕШЕНИЕ.

1. Составляем и вычисляем определитель

.

Определитель вычислен по правилу треугольника.

1. Транспонируем матрицу. Получаем

.

1. Вычисляем алгебраические дополнения

; ; ; ; ; ; ; ; .

; 

Вычисляем . Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

; .

Вычисляем .

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

 ; ; ; ; ; ; .

Составим обратную матрицу

A

A

Сделаем проверку



*Пример 5.*

 Решить систему матричным способом

 .

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу :

 .

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

 .

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

 .

Тогда система запишется в виде

 .

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на  слева. Получаем:

 .

Находим обратную матрицу:

 ; ;

  (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов;  (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на , получаем матрицу .

 .

Отсюда получаем ответ:

 ; ; .

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

***Вариант 1.***

**Задание 1**.Решить систему уравнений по формулам Крамера:

**а) б)**

**Задание 2**.Решить систему уравнений по формулам Крамера:

**Задание 3**.Решить систему уравнений по формулам Крамера:

 **а) б)**

**Задание 4.**

а) При каком значении ***а*** система не имеет решений?

б) При каком значении ***а*** система имеет бесконечно много решений?

**Задание 5**. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

|  |  |
| --- | --- |
| **а)**  | **б)**  |
|  |  |

**Задание 6**. Решить систему уравнений методом Крамера:

**а)** **б)**

**Итог занятия:**